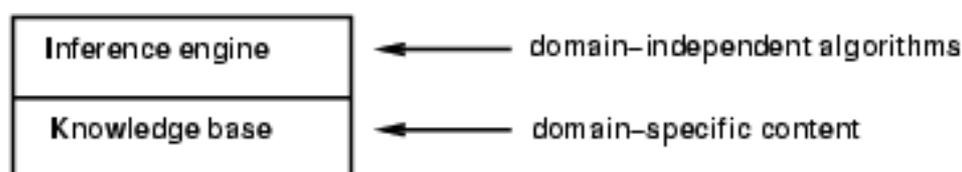


## Basi di Conoscenza

---



- Knowledge base (KB) = insiemi di sentenze **scritte in un linguaggio formale**.

Le risposte devono “seguire” dalla KB.

- Inference Engine: strutture dati ed algoritmi per manipolare la KB ed arrivare ad una risposta.

**Consideremo come linguaggio formale la logica dei predicati del primo ordine**

1

---

## LA LOGICA DEI PREDICATI DEL PRIMO ORDINE

---

- *Materiale dal libro: L. Console, E. Lamma, P. Mello, M. Milano: Programmazione Logica e Prolog, Seconda Edizione UTET editore.*
- La logica è quella scienza che fornisce all'uomo gli strumenti indispensabili per controllare con sicurezza la rigosità dei ragionamenti.
- **La logica** fornisce gli strumenti formali per:
  - analizzare le inferenze in termini di operazioni su espressioni simboliche;
  - dedurre conseguenze da certe premesse;
  - studiare la verità o falsità di certe proposizioni data la verità o falsità di altre proposizioni;
  - stabilire la consistenza e la validità di una data teoria.

2

# LOGICA E INFORMATICA

---

- La logica è utilizzata:
  - In Intelligenza Artificiale come linguaggio formale per la rappresentazione di conoscenza
    - semantica non ambigua
    - sistemi formali di inferenza
  - per sistemi di dimostrazione automatica di teoremi e studio di meccanismi efficienti per la dimostrazione
  - Per la progettazione di reti logiche;
  - Nei database relazionali, come potente linguaggio per l'interrogazione intelligente;
  - Come linguaggio di specifica di programmi che per eseguire prove formali di correttezza;
  - Come un vero e proprio linguaggio di programmazione (programmazione logica e PROLOG).

3

# LOGICA CLASSICA

---

- Si suddivide in due classi principali:
  - logica proposizionale
  - logica dei predicati.
- Permettono di esprimere proposizioni (cioè frasi) e relazioni tra proposizioni.
- La principale differenza tra le due classi è in termini di espressività: nella logica dei predicati è possibile esprimere variabili e quantificazioni, mentre questo non è possibile nella logica proposizionale.
- Il linguaggio della logica dei predicati del primo ordine è definito da:
  - una sintassi: caratteristiche strutturali del linguaggio formale (mediante una grammatica) senza attribuire alcun significato ai simboli;
  - una semantica, che interpreta le frasi sintatticamente corrette del linguaggio. Si dà una interpretazione alle formule stabilendo se una frase è vera o falsa.

4

# LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

---

- Alfabeto, che consiste di cinque insiemi:
  - l'insieme dei simboli di costante, C;
  - l'insieme dei simboli di funzione, F;
  - l'insieme dei simboli di predicato (o relazione), P;
  - l'insieme dei simboli di variabile, V;
  - i connettivi logici:
    - ~ (negazione),
    - ^ (congiunzione),
    - ∨ (disgiunzione),
    - ← (implicazione),
    - ↔ (equivalenza),
    - le parentesi “(“ ”)”
    - e i quantificatori esistenziale ( $\exists$ ) e universale ( $\forall$ ).

5

# LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

---

- Costanti: singole entità del dominio del discorso.
  - Es. “maria”, “giovanna”, “3”  $\Rightarrow$  iniziale minuscola
- Variabili: entità non note del dominio,
  - Es. X, Y  $\Rightarrow$  iniziale maiuscola
- Funzioni n-arie: individua univocamente un oggetto del dominio del discorso mediante una relazione tra altri “n” oggetti del dominio.
  - Es. madre(maria)
- Importante: le funzioni, in logica, non presuppongono alcun concetto di valutazione
- Predicati n-ari: generica relazione (che può essere vera o falsa) fra “n” oggetti del dominio del discorso.
  - Es. parente(giovanna,maria)

6

## LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

---

- Date queste definizioni principali possiamo definire:
- Termine (definito ricorsivamente):
  - - una variabile è un termine;
  - - una costante è un termine;
  - - se  $f$  è un simbolo di funzione  $n$ -aria e  $t_1, \dots, t_n$  sono termini, allora  $f(t_1, \dots, t_n)$  è un termine.
  - Es. maria,  $f(X)$
- Atomo o formula atomica:
  - l'applicazione di un simbolo di predicato  $n$ -ario  $p$  a  $n$  termini  $t_1, \dots, t_n$ :  $p(t_1, \dots, t_n)$ .
  - Es. parente(giovanna, maria)

7

## LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

---

- Espressione o formula: sequenza di simboli appartenenti all'alfabeto.
  - parente(giovanna, maria) (E1)
  - $\exists X (\text{uomo}(X) \wedge \text{felice}(X))$  (E2)
  - $\forall X (\text{uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(X))$  (E3)
  - $\exists X (\text{uomo}(X) \wedge)$  (E4)
  - $\exists X (\text{uomo}(f(X))$  (E5)
- Formule ben formate (fbf): frasi sintatticamente corrette del linguaggio. Si ottengono attraverso combinazione di formule atomiche, utilizzando i connettivi e i quantificatori. Sono definite ricorsivamente come segue:
  - ogni atomo è una fbf;

8

# LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

---

- Formule ben formate (fbf): frasi sintatticamente corrette del linguaggio. Si ottengono attraverso combinazione di formule atomiche, utilizzando i connettivi e i quantificatori. Sono definite ricorsivamente come segue:
  - ogni atomo è una fbf;
  - se A e B sono fbf, allora lo sono anche  $\sim A$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \rightarrow B$ ,  $A \leftrightarrow B$  (eventualmente racchiuse tra parentesi tonde bilanciate);
  - se A è una fbf e X è una variabile,  $\forall X A$  e  $\exists X A$  sono fbf.
- Le espressioni (E1), (E2), (E3) sono formule ben formate, mentre non lo sono (E4) e (E5).
- Letterale: fbf atomica o la sua negazione. Ad esempio, la formula (E1) è un letterale.

9

# REGOLE DI PRECEDENZA TRA OPERATORI

---

$\sim \exists \forall$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow \leftrightarrow$

- Esempio

La fbf:  $a \vee \sim b \wedge \exists x c(x) \rightarrow d(x, y)$

è equivalente a:  $(a \vee ((\sim b) \wedge (\exists x c(x)))) \rightarrow d(x, y)$

- fbf in forma normale prenessa disgiuntiva (“disjunctive prenex normal form”): disgiunzione di una o più fbf composte da congiunzioni di letterali; le quantificazioni compaiono tutte in testa a F.
- fbf in forma normale prenessa congiuntiva (“conjunctive prenex normal form”): congiunzione di una o più fbf composte da disgiunzioni di letterali; le quantificazioni compaiono tutte in testa ad F.

10

# REGOLE DI PRECEDENZA TRA OPERATORI

---

- Esempio

La fbf:  $\exists x \forall y \exists z (a(x) \wedge b(y, z)) \vee (c(x) \wedge \sim a(z) \wedge d) \vee f$   
è in forma normale disgiuntiva.

La fbf:  $\exists x \forall y \exists z (a(x) \vee b(y, z)) \wedge (c(x) \vee \sim a(z) \vee d) \wedge f$   
è in forma normale congiuntiva.

- Qualunque fbf può essere trasformata in forma normale prenessa (congiuntiva o disgiuntiva) attraverso opportune trasformazioni sintattiche.
- Campo di azione (scope) di un quantificatore: fbf che lo segue immediatamente. Nel caso di ambiguità si utilizzano le parentesi tonde.
- Esempio
  - Nella fbf:  $\forall x (p(x, y) \wedge q(x)) \vee q(x)$
  - la quantificazione sulla variabile  $x$  ha come campo d'azione la formula  $p(x, y) \wedge q(x)$

11

# REGOLE DI PRECEDENZA TRA OPERATORI

---

- Variabili libere: variabili che non compaiono all'interno del campo di azione di un quantificatore.
- Esempio nella fbf:  $F = \forall x (p(x, y) \wedge q(x))$  la variabile  $Y$  risulta libera in  $F$ .
- Formule chiuse: fbf che non contengono alcuna variabile libera. Ad esempio, le formule (E1), (E2) ed (E3) sono fbf chiuse. Nel seguito considereremo solo formule fbf chiuse.
- Formule ground: formule che non contengono variabili. Ad esempio la formula (E1) è una formula "ground".
- Varianti: una formula  $F2$ , ottenuta rinominando le variabili di una formula  $F1$ , è detta variante di  $F1$ .
- Esempio La formula:  $\forall x \exists y p(x, y)$  è una variante della formula  $\forall w \exists z p(w, z)$ .

12

# SEMANTICA

---

- Occorre associare un significato ai simboli.
- Ogni sistema formale è la modellizzazione di una certa realtà (ad esempio la realtà matematica).
- Un'interpretazione è la costruzione di un rapporto fra i simboli del sistema formale e tale realtà (chiamata anche dominio del discorso).
- Ogni formula atomica o composta della logica dei predicati del primo ordine può assumere il valore vero o falso in base alla frase che rappresenta nel dominio del discorso.
- **Esempio:**
  - $\forall x \forall y \forall z (op(x, y, z) \rightarrow op(y, x, z))$
  - se  $X, Y, Z$  variano sull'insieme dei numeri reali tale formula è vera se il simbolo di predicato "op" ha il significato di un operatore commutativo (es: somma o moltiplicazione), falsa se l'operatore non è commutativo (es. sottrazione o divisione).

13

# INTERPRETAZIONE

---

- Dato un linguaggio del primo ordine  $L$  un'interpretazione per  $L$  definisce un dominio non vuoto  $D$  e assegna:
  - a ogni simbolo di costante in  $C$ , una costante in  $D$ ;
  - a ogni simbolo di funzione  $n$ -ario  $F$ , una funzione:
    - $F: D^n \rightarrow D$ ;
  - a ogni simbolo di predicato  $n$ -ario in  $P$  una relazione in  $D^n$ , cioè un sottoinsieme di  $D^n$ .
- Esempio: Linguaggio del primo ordine,  $L$ , nel quale si ha una costante "0", un simbolo di funzione unaria "s" e un simbolo di predicato binario "p".

14

# INTERPRETAZIONE

---

- **Interpretazione I1** D: numeri naturali.
  - “0” rappresenta il numero zero.
  - “s” rappresenta il successore di un numero naturale
  - “p” rappresenta la relazione binaria “ $\leq$ ”
- **Interpretazione I2** D: numeri interi negativi.
  - “0” rappresenta il numero zero.
  - “s” rappresenta il predecessore di un numero naturale
  - “p” rappresenta la relazione binaria “ $\leq$ ”

15

# VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf

---

- Data un'interpretazione il valore di verità di una fbf si definisce secondo le seguenti regole.
- Formula atomica “ground” ha valore vero sotto un'interpretazione quando il corrispondente predicato è soddisfatto (cioè quando la corrispondente relazione è vera nel dominio). La formula atomica ha valore falso quando il corrispondente predicato non è soddisfatto.
- Interpretazione I1.
  - $p(0, s(0))$  vero
  - $p(s(0), 0)$  falso
- Interpretazione I2.
  - $p(0, s(0))$  falso
  - $p(s(0), 0)$  vero

16

## VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (2)

---

- Formula composta il valore di verità di una formula composta rispetto a un'interpretazione si ottiene da quello delle sue componenti utilizzando le tavole di verità dei connettivi logici.

A	B	$\sim A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

*Nota: l'implicazione  $A \Rightarrow B$  è diversa rispetto al "se ..... allora" utilizzato nel linguaggio naturale.*

*A: antecedente      B: conseguente*

17

## VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (3)

---

- Data la formula F:  
 $\text{volano(asini)} \Rightarrow \text{ha\_scritto(manzoni,promessi\_sposi)}$   
assumendo l'interpretazione più intuitiva, F ha valore vero, poiché l'antecedente ha valore falso in tale interpretazione.
- La formula F:  
 $p(s(0),0) \Rightarrow p(0,s(0))$   
ha valore vero nell'interpretazione I1 poiché l'antecedente ha valore falso, mentre ha valore falso in I2 poiché a un antecedente vero corrisponde un conseguente falso.
- Formula quantificata esistenzialmente: una formula del tipo  $\exists X F$  è vera in un'interpretazione I se esiste almeno un elemento d del dominio D tale che la formula F', ottenuta assegnando d alla variabile X, è vera in I. In caso contrario F ha valore falso.

18

## VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (2)

---

- Esempio

La formula  $\exists X p(X,s(0))$  ha valore vero nell'interpretazione  $I_1$  in quanto esiste un numero naturale, zero, minore di uno, tale che la formula  $F'=p(0,s(0))$  ha valore vero in  $I_1$ .

- 4) Formula quantificata universalmente: una formula del tipo  $\forall X F$  è vera in un'interpretazione  $I$  se per ogni elemento  $d$  del dominio  $D$ , la formula  $F'$ , ottenuta da  $F$  sostituendo  $d$  alla variabile  $X$ , è vera in  $I$ . Altrimenti  $F$  ha valore falso.

- Esempio

La fbf  $\forall Y p(0,Y)$  ha valore vero rispetto alle interpretazioni  $I_1$  (dove viene interpretata come "0 è minore o uguale a ogni intero positivo  $Y$ "), mentre ha valore falso rispetto a  $I_2$  poiché esiste almeno un elemento del dominio che la falsifica (esempio non è vero che "0 è minore o uguale a  $-1$ ").

19

## MODELLI

---

- Data una interpretazione  $I$  e una fbf chiusa  $F$ ,  $I$  è un modello per  $F$  se e solo se  $F$  è vera in  $I$ .
  - Esempio: Per la fbf  $\forall Y p(0,Y)$  l'interpretazione  $I_1$  è un modello, mentre  $I_2$  non lo è.
- Una fbf è soddisfacibile se e solo se è vera almeno in una interpretazione, ovvero se esiste almeno un modello per essa.
- Una fbf che ha valore vero per tutte le possibili interpretazioni, cioè per cui ogni possibile interpretazione è un modello, è detta logicamente valida.
  - Esempio: La fbf  $\forall X p(X) \vee \sim(\forall Y p(Y))$  è logicamente valida. Infatti, le formule  $\forall X p(X)$  e  $\forall Y p(Y)$  sono semplici varianti della stessa formula  $F$  e quindi hanno i medesimi valori di verità per qualunque interpretazione. In generale,  $F \vee \sim F$  ha sempre valore vero, in modo indipendente dall'interpretazione.
- $F$  logicamente valida  $\Leftrightarrow \sim F$  è non soddisfacibile.
- $F$  è soddisfacibile  $\Leftrightarrow \sim F$  non è logicamente valida.

20

## INSIEMI DI FORMULE (1)

---

- Un insieme di formule chiuse del primo ordine  $S$  è soddisfacibile se esiste una interpretazione  $I$  che soddisfa tutte le formule di  $S$  (cioè che è un modello per ciascuna formula di  $S$ ). Tale interpretazione è detta modello di  $S$ .

Esempio

- Si consideri il seguente insieme di formule  $S$ :
- $S = \{\forall Y p(Y, Y), p(s(0), 0) \Rightarrow p(0, s(0))\}$ .
- L'interpretazione  $I_1$  è modello di  $S$ , mentre  $I_2$  non lo è. In  $I_2$  è infatti soddisfatta la prima formula dell'insieme, ma non la seconda.
- Un insieme di formule  $S$  che non può essere soddisfatto da alcuna interpretazione, è detto insoddisfacibile (o inconsistente). Ad esempio l'insieme di formule  $\{A, \sim A\}$  è insoddisfacibile.

21

## INSIEMI DI FORMULE (2)

---

- Un insieme di formule chiuse del primo ordine  $S$  è **soddisfacibile** se esiste una interpretazione  $I$  che soddisfa tutte le formule di  $S$  (cioè che è un modello per ciascuna formula di  $S$ ). Tale interpretazione è detta modello di  $S$ .
- Esempi di insiemi di formule insoddisfacibili sono:
  - $S_1 = \{\sim (\exists X \forall Y p(X, Y)), \exists X \forall Y p(X, Y)\}$
  - $S_2 = \{p(s(0), 0) \Rightarrow p(0, s(0)), p(s(0), 0), \sim p(0, s(0))\}$
  - In  $S_1$ , infatti, compaiono una formula e la sua negazione. In  $S_2$ , per ogni interpretazione in cui  $p(s(0), 0)$  e  $\sim p(0, s(0))$  sono vere, la formula  $p(s(0), 0) \Rightarrow p(0, s(0))$  non è vera, per la tabella di verità della negazione e dell'implicazione.

22

## CONSEGUENZA LOGICA (1)

---

- Una formula  $F$  segue logicamente (o è conseguenza logica) da un insieme di formule  $S$  (e si scrive  $S \models F$ ), se e solo se ogni interpretazione  $I$  che è un modello per  $S$ , è un modello per  $F$ .

Esempio

- Si consideri l'insieme di fbf  $S$ :
- $\{p(0,0), \forall X p(X,X), \forall X \forall Y (p(X,Y) \Rightarrow p(X,s(Y)))\}$
- Da  $S$  segue logicamente la formula  $F=p(0,s(0))$  poiché ogni interpretazione  $I$  che soddisfa  $S$  soddisfa anche  $F$ .
- Dall'insieme  $S$ , invece, non segue logicamente la formula  $F1: p(s(0),0)$  in quanto esiste un'interpretazione ( $I1$ ) che soddisfa  $S$ , ma non  $F1$ .

23

## CONSEGUENZA LOGICA (2)

---

- Una formula  $F$  segue logicamente (o è conseguenza logica) da un insieme di formule  $S$  (e si scrive  $S \models F$ ), se e solo se ogni interpretazione  $I$  che è un modello per  $S$ , è un modello per  $F$ .

Proprietà

- Se una fbf  $F$  segue logicamente da  $S$  ( $S \models F$ ), allora l'insieme  $S \cup \{\sim F\}$  è insoddisfacibile.
- Viceversa, se  $S \cup \{\sim F\}$  è insoddisfacibile (e  $S$  era soddisfacibile), allora  $F$  segue logicamente da  $S$ .
- Difficile lavorare a livello semantico (interpretazione, modelli). Quindi si lavora a livello sintattico.

24

# SISTEMI DI REFUTAZIONE

---

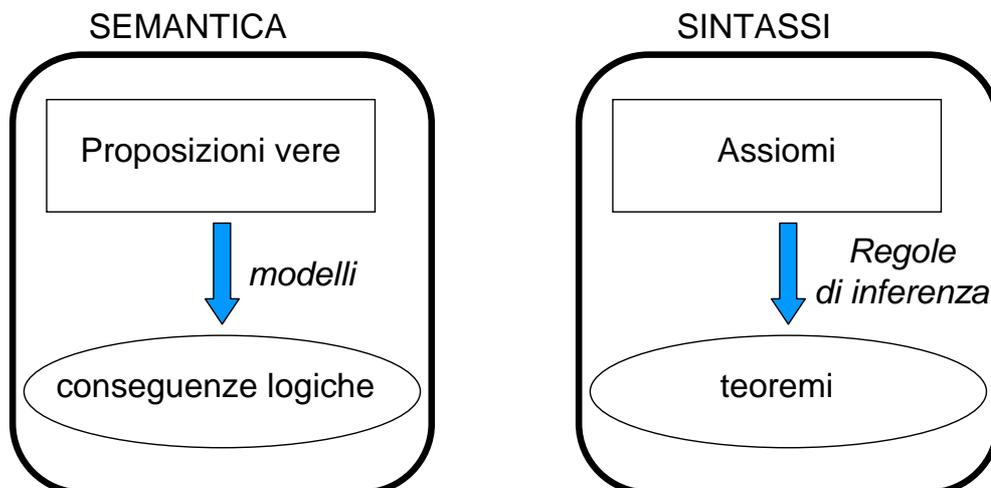
- I sistemi di refutazione si basano su questa proprietà: per dimostrare  $S \models F$  supposto  $S$  soddisfacibile è sufficiente dimostrare che  $S \cup \{\sim F\}$  è insoddisfacibile.
- Problema interessante:

Determinare se una formula  $F$  segue logicamente da  $S$  (ovvero che  $S \cup \{\sim F\}$  è insoddisfacibile) utilizzando solo semplici trasformazioni sintattiche (regole di inferenza), possibilmente ripetitive e quindi automatizzabili, e non introducendo concetti quali significato o interpretazione o modello.

25

## Logica: apparato semantico e sintattico

---



26

## TEORIE DEL PRIMO ORDINE (1)

---

- Calcolo proposizionale: verifica di formula/e vera/e tramite le tavole di verità
- Calcolo dei predicati del primo ordine: tavole di verità troppo complesse. Dominio di interpretazione estremamente grande, se non infinito. Si ricorre al metodo assiomatico (noto come proof theory).
- La logica dei predicati proposizionale e del primo ordine può essere formulata come sistema assiomatico-deduttivo.

### Teoria assiomatica

- formule ben formate ritenute vere: assiomi
- criteri di manipolazione sintattica: regole di inferenza derivano fbf da fbf
- Scopo: produrre nuove formule sintatticamente corrette (teoremi).

27

## TEORIE DEL PRIMO ORDINE (1)

---

- Semplificazioni:

$(A \wedge B)$  equivale a  $(\sim(A \rightarrow (\sim B)))$

$(A \vee B)$  equivale a  $((\sim A) \rightarrow B)$

$(A = B)$  equivale a  $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

- Inoltre, per i quantificatori:

$\exists X A$  abbrevia  $\sim(\forall X \sim A)$

$\forall X A$  abbrevia  $\sim(\exists X \sim A)$

28

## REGOLE DI INFERENZA

---

- **Modus Ponens (MP):**

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

che deriva da due formule del tipo  $A$  e  $A \rightarrow B$  la nuova formula  $B$ .

- **Specializzazione (Spec):**

$$\frac{\forall X A}{A(t)}$$

- Da una formula quantificata universalmente è possibile derivare una formula identica all'originale in cui la variabile  $X$  è sostituita da un elemento del dominio del discorso (costante e funzione).

29

## DIMOSTRAZIONE DI TEOREMI (1)

---

- Dimostrazione: sequenza finita di fbf  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , tale che ciascuna  $f_i$  o è un assioma oppure è ricavabile dalle fbf precedenti mediante una regola di inferenza.
- Teorema: L'ultima fbf di ogni dimostrazione.
- Prova del teorema: sequenza di regole di inferenza applicate.
- Una fbf  $F$  è derivabile in una teoria  $T$  ( $T \vdash F$ ) se esiste una sequenza di fbf  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , tale che  $f_n = F$  e, per ogni  $i$ , o  $f_i$  è un assioma di  $T$ , oppure è ricavabile dalle fbf precedenti mediante una regola di inferenza di  $T$ .

30

## DIMOSTRAZIONE DI TEOREMI (2)

---

### Esempio

- Teoria T: assiomi propri (relazione di minore uguale sui numeri naturali):

$$p(0,0) \quad (A1)$$

$$\forall X \forall Y (p(X,Y) \Rightarrow p(X,s(Y))) \quad (A2)$$

$$\forall X p(X,X) \quad (A3)$$

- Teorema  $p(0,s(0))$  (cioè  $T \vdash p(0,s(0))$ )

- Trasformazione da Spec e A2:

$$p(0,0) \Rightarrow p(0,s(0))$$

$$\text{applicando MP} \quad p(0,s(0))$$

## DECIDIBILITÀ

---

- Teoria decidibile teoria per la quale esiste un metodo meccanico per stabilire se una qualunque fbf è un teorema o non lo è.
- Il calcolo dei predicati del primo ordine non è decidibile, ma **semi-decidibile**: se una formula è un teorema, esiste un metodo meccanico che la deriva in un numero finito di passi. Se invece la formula non è un teorema, non è garantita, in generale, la terminazione del metodo meccanico (Turing 1936, Church 1936).
- Una teoria del primo ordine è un insieme di fbf chiuse (assiomi) e si può quindi parlare di modello di una teoria.
- Un modello per una teoria del primo ordine T è un'interpretazione che soddisfa tutti gli assiomi di T (assiomi logici e assiomi propri).
- Se T ha almeno un modello viene detta consistente (o soddisfacibile).

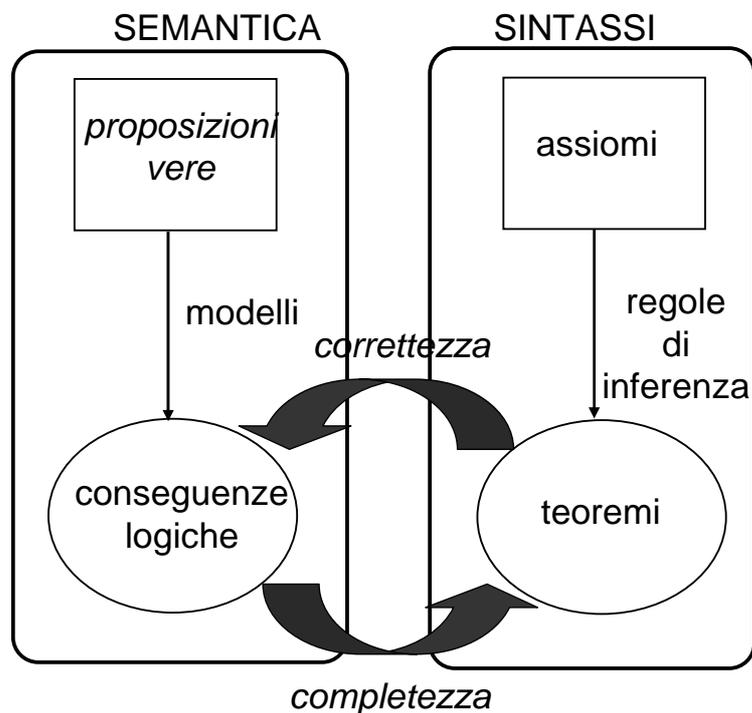
## CORRETTEZZA E COMPLETEZZA (1)

- Una teoria assiomatica è **corretta** se i teoremi dimostrati seguono logicamente dagli assiomi della teoria.
- Una teoria assiomatica è **completa** se tutte le fbf che seguono logicamente dalla teoria possono essere dimostrati come teoremi della teoria.
- Se T è corretta e completa è garantita l'equivalenza tra l'aspetto sintattico e semantico

$$T \vdash F \iff T \models F.$$

33

## CORRETTEZZA E COMPLETEZZA (2)



34

## ESEMPIO

---

- Si consideri una teoria del primo ordine  $T$ , data dai seguenti assiomi propri che rappresentano la relazione di minore sui numeri naturali:

$$p(0,s(0)) \quad (A1)$$

$$\forall X \forall Y (p(X,Y) \rightarrow p(X,s(Y))) \quad (A2)$$

$$\forall X p(X,s(X)) \quad (A3)$$

- Le regole di inferenza di  $T$  siano Modus Ponens, Specializzazione e la seguente regola:
- **Abduzione (ABD):**

$$\frac{B, A \rightarrow B}{A}$$

35

## ESEMPIO

---

- In  $T$  si deriva come teorema la formula  $p(0,0)$  applicando le seguenti trasformazioni:
  - da Spec. e A2:
  - $\forall X \forall Y (p(X,Y) \rightarrow p(X,s(Y))) \Rightarrow \forall Y (p(0,Y) \rightarrow p(0,s(Y))) \quad (T1)$
- da Spec. e T1:
  - $p(0,0) \rightarrow p(0,s(0)) \quad (T2)$
- applicando ABD a T2 e A6:
  - $p(0,0) \quad (T5)$

36

## ESEMPIO

---

- A causa dell'applicazione dell'abduzione, questa teoria **non è corretta**: un'interpretazione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali e associa al simbolo di funzione "s" la funzione successore e al simbolo di predicato "p" la relazione < (minore) è un modello per gli assiomi, ma non per la formula  $p(0,0)$ .
- **Esempio**
  - sta-male(mario).
  - $\forall X (\text{ha-epatite}(X) \rightarrow \text{sta-male}(X))$ .
- **si conclude:**
  - ha-epatite(mario).

**ERRORE !!**

37

## ABDUZIONE: ESEMPI

---

$\forall X (\text{person}(X) \rightarrow \text{mortal}(X))$ .

- mortal(tweety).
- Allora deriviamo: person(tweety).
- Vincoli:
  - $\forall X \text{not}(\text{person}(X) \text{ and } \text{bird}(X))$ .
  - Se aggiungiamo: bird(tweety)
  - violiamo i vincoli.
- Esempio

Ragionamento abduittivo usato per diagnosi di guasti

38

## ABDUZIONE: ESEMPI

---

- Teoria:
  - ruota\_traballante:- raggi\_rotti.
  - ruota\_traballante:- gomma\_sgonfia.
  - gomma\_sgonfia:- valvola\_difettosa.
  - gomma\_sgonfia:- forata\_camera\_aria.
  - gomma\_mantiene\_aria.
- Vincoli:
  - :- gomma\_sgonfia, gomma\_mantiene\_aria
- Goal
  - ?- ruota\_traballante.
- Risposta: yes if raggi\_rotti
- Mentre:
  - yes if valvola\_difettosa
  - yes if forata\_camera\_aria
  - non sono accettabili in quanto violano i vincoli.

39

## MONOTONICITÀ

---

- Un'altra proprietà fondamentale delle teorie del primo ordine è la monotonicità. Una teoria  $T$  è monotona se l'aggiunta di nuovi assiomi non invalida i teoremi trovati precedentemente.

### Proprietà

- Sia  $Th(T)$  l'insieme dei teoremi derivabili da  $T$ . Allora  $T$  è monotona se  $Th(T) \subseteq Th(T \cup H)$  per qualunque insieme aggiuntivo di assiomi  $H$ .
- Esistono regole di inferenza non monotone. Ad esempio la regola nota come Assunzione di Mondo Chiuso ("Closed World Assumption"):

### Assunzione di Mondo Chiuso (CWA):

$$\frac{T \mid \neq A}{\sim A}$$

- se una formula atomica "ground"  $A$  non è conseguenza logica di una teoria  $T$ ,  $\sim A$  si può considerare un teorema di  $T$ . Se alla teoria  $T$  si aggiunge l'assioma  $A$ , non si può più derivare  $\sim A$ , da cui segue la non monotonicità del sistema di inferenza.

40

# Sommario

---

- Gli agenti logici applicano **inferenze** a una **base di conoscenza** per derivare nuove informazioni.
- Concetti base della logica:
  - **sintassi**: struttura formale delle sentenze
  - **semantica**: **verita`** di sentenze rispetto ad **interpretazioni/modelli**
  - **conseguenza logica (entailment)**: sentenza necessariamente vera data un'altra sentenza
  - **inferenza**: derivare (sintatticamente) sentenze da altre sentenze
  - **correttezza (soundness)**: la derivazione produce solo sentenze che sono conseguenza logica.
  - **Completezza (completeness)**: la derivazione puo' prdurre tutte le conseguenze logiche.